Tadeusz D r w i ę g a, Zofia G r a b o ś (Lublin)

# ZASTOSOWANIE PROCEDURY JEDNOCZESNEGO TESTOWANIA HIPOTEZ SANOVA W ANALIZIE REGRESJI WIELOKROTNEJ

## 1. Wstęp i streszczenie

W wielokrotnej analizie regresji testuje się hipotezy o nieistotności wektora współczynników regresji lub jego podwektora. W przypadku odrzucenia takiej hipotezy interesująca jest odpowiedź na pytanie, czy wszystkie składowe tego wektora należy uznać za niezerowe, czy tylko niektóre. Jedną z metod pozwalającą stwierdzić, które ze składowych podwektora wektora współczynników regresji należy uznać za istotne wraz z nim jest procedura jednoczesnego testowania hipotez SANOVA.

Ideę tej procedury, opartej na wielowymiarowym rozkładzie F, testującej jednocześnie układ hipotez liniowych przedstawił Ghosh (1955), a rozwinęli ją Ramachandran (1956) i Krishnaiah (1965), który udowodnił, że przedziały ufności związane z procedurą SANOVA są nie dłuższe niż odpowiednie przedziały ufności Scheffe'go. Zastosowanie tej procedury zostało omówione w pracach cytowanych powyżej, a także w publikacjach: Krishnaiah, Armitage (1970), Schuurmann, Krishnaiah, Chattopadhyay (1975), Drwięga, Graboś (1978). Zaletą procedury SANOVA jest to, że nie wymaga ona niezależności sum kwadratów dla poszczególnych hipotez liniowych. Pozwala to na stosowanie jej w wielokrotnej analizie regre-

sji dla kompozycyjnych układów czynnikowych. Możliwość takiego wykorzystania procedury SANOVA pokazano w niniejszej pracy. W paragrafie 2 podano definicję wielowymiarowego rozkładu F. Procedurę SANOVA przedstawiono w paragrafie 3. W paragrafie 4 wyprowadzono wzory umożliwiające stosowanie procedury SANOVA w analizie regresji. Zastosowanie tej procedury na przykładzie liczbowym przedstawiono w paragrafie 5.

## 2. Wielowymiarowy rozkład F

Podaną niżej definicję wielowymiarowego rozkładu F można znaleźć w pracy Krishnaiah i Armitage (1970).

Niech $\underline{X}$ będzie n×k macierzą n niezależnych losowych wektorów wierszowych o tym samym k-wymiarowym rozkładzie normalnym $N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, z wektorem wartości oczekiwanych $\underline{\mu}$ i macierzą kowariancji $\underline{\Sigma} = (\sigma_{ij})$. Niech $\underline{S} = \underline{X}'\underline{X}$, a $\frac{s^2}{\sigma^2}$, gdzie $E(s^2) = m\sigma^2$, niech będzie zmienną losową o rozkładzie $\chi^2$ z m stopniami swobody, stochastycznie niezależną od elementów na przekątnej macierzy $\underline{S}$, tzn. od $s_{11}, s_{22}, \ldots, s_{kk}$. Wspólny rozkład zmiennych $F_1, F_2, \ldots, F_k$, gdzie $F_i = \frac{s_{ii}}{n\sigma_{ii}} : \frac{s^2}{m\sigma^2}$ nazywamy k-wymiarowym rozkładem F z (n,m) stopniami swobody i z $\underline{\Sigma}$ jako macierzą kowariancji "stowarzyszonego" k-wymiarowego rozkładu normalnego. Rozkład ten nazywamy centralnym lub niecentralnym rozkładem w zależności od tego, czy $\underline{\mu}$ jest wektorem zerowym czy niezerowym.

Tablice wielowymiarowego rozkładu F można znaleźć w publikacji Schuurmann, Krishnaiah i Chattopadhyay (1975).

Jeśli n=1 to wielowymiarowy rozkład F redukuje się do wielowymiarowego rozkładu $t^2$. Tablice tego rozkładu znajdują się w pracy Krishnaiah i Armitage (1970).

## 3. Procedura testów jednoczesnych SANOVA

Rozważmy liniowy model stały

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{\beta} + \underline{e} \tag{3.1}$$

gdzie $\underline{y}$ jest wektorem N obserwacji, $\underline{\beta}$ jest wektorem p nieznanych parametrów, $\underline{A}$ - znaną macierzą o wymiarach N×p, a $\underline{e}$ - wektorem błędów losowych o N-wymiarowym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną $\underline{O}$ i macierzą kowariancji $\sigma^2\underline{I}_N$ ($\underline{O}$-wektor kolumnowy złożony z N zer, $\underline{I}_N$ - macierz jednostkowa N×N). Zakładamy, że $\sigma^2$ jest nieznane.

Zajmiemy się weryfikacją testowalnej hipotezy liniowej

$$H : \underline{K}'\,\underline{\beta} = \underline{O} \tag{3.2}$$

gdzie $\underline{K}$ jest macierzą o wymiarach p×q, rzędu r.
Hipotezę (3.2) możemy przedstawić jako koniunkcję hipotez

$$H_i : \underline{v}_i'\,\underline{\beta} = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,t;\ t \geq r) \tag{3.3}$$

gdzie wektory $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_t$ są liniowymi kombinacjami kolumn macierzy $\underline{K}$, przy czym dokładnie r spośród nich jest liniowo niezależnych. W szczególności może być t=q i $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_q$

mogą być kolumnami macierzy $\underline{K}$. To, że hipoteza $H$ jest koniunkcją hipotez $H_i$ $(i = 1,2,\ldots,t)$ będziemy zapisywali $H = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$. Każdej hipotezie $H_i$ $(i = 1,2,\ldots,t)$ można przyporządkować zmienną losową

$$F_i = \frac{SS_i}{V_e} \tag{3.4}$$

gdzie $SS_i$ jest sumą kwadratów dla hipotezy $H_i$, a $V_e$ - średnim kwadratem dla błędu. Jeśli hipoteza $H = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$ jest prawdziwa, to łączny rozkład statystyk $F_1, F_2, \ldots, F_t$ jest t-wymiarowym rozkładem $F$ z $(1, \nu_e)$ - stopniami swobody, gdzie $\nu_e$ jest liczbą stopni swobody dla błędu. Hipotezę $H_i$ $(i = 1,2,\ldots,t)$ odrzucamy na poziomie istotności $\alpha$, jeśli $F_i > F_\alpha^t$, przy czym wartość $F_\alpha^t$ jest tak dobrana, że

$$P[F_i \leq F_\alpha^t;\ i = 1,2,\ldots,t \mid \bigcap_{i=1}^{t} H_i] = 1 - \alpha$$

Hipotezę $H$ odrzucamy, jeśli odrzucimy przynajmniej jedną hipotezę $H_i$ (patrz Schuurmann, Krishnaiah i Chattopadhyay (1975)).

Z definicji wielowymiarowego rozkładu $F$ podanej w poprzednim paragrafie wynika, że jest on scharakteryzowany przez liczby stopni swobody i macierz kowariancji "stowarzyszonego" wielowymiarowego rozkładu normalnego.

Suma kwadratów $SS_i$ dla hipotezy $H_i$ $(i = 1,2,\ldots,t)$ postaci (3.3) jest równa

$$SS_i = \underline{y}'\underline{A}\ \underline{G}\ \underline{v}_i(\underline{v}_i'\ \underline{G}\ \underline{v}_i)^{-1}\underline{v}_i'\ \underline{G}\ \underline{A}'\ \underline{y} = [(\underline{v}_i'\ \underline{G}\ \underline{v}_i)^{-\frac{1}{2}}\ \underline{v}_i'\ \underline{G}\ \underline{A}'\underline{y}]^2$$

(patrz Searle, 1971), gdzie $\underline{G}$ oznacza uogólnioną macierz odwrotną do macierzy $\underline{A}'\underline{A}$, tzn. macierz spełniającą warunek $\underline{A}'\underline{A}\ \underline{G}\ \underline{A}'\underline{A} = \underline{A}'\underline{A}$. Macierz $\underline{X}$ t-wymiarowego rozkładu normalnego będzie zatem wektorem wierszowym postaci

$$\underline{X} = [(\underline{v}_1' \underline{G} \underline{v}_1)^{-\frac{1}{2}} \underline{v}_1' \underline{G} \underline{A}' \underline{Y}, (\underline{v}_2' \underline{G} \underline{v}_2)^{-\frac{1}{2}} \underline{v}_2' \underline{G} \underline{A}' \underline{Y}, \ldots, (\underline{v}_t' \underline{G} \underline{v}_t)^{-\frac{1}{2}} \underline{v}_t' \underline{G} \underline{A}' \underline{Y}] \tag{3.5}$$

Macierz kowariancji $\underline{\Sigma}$ tego wektora ma wyrazy równe

$$\sigma_{ij} = \sigma^2 \frac{\underline{v}_i' \underline{G} \underline{v}_j}{\sqrt{\underline{v}_i' \underline{G} \underline{v}_i}\ \sqrt{\underline{v}_j' \underline{G} \underline{v}_j}} \quad \text{dla } i,j = 1,2,\ldots,t \tag{3.6}$$

zaś elementy macierzy korelacji $\underline{\Omega} = (\rho_{ij})$ mają postać

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} = \frac{\underline{v}_i' \underline{G} \underline{v}_j}{\sqrt{\underline{v}_i' \underline{G} \underline{v}_i}\ \sqrt{\underline{v}_j' \underline{G} \underline{v}_j}} \tag{3.7}$$

Tablice wielowymiarowego rozkładu F skonstruowane są jedynie dla przypadku, gdy wszystkie $\rho_{ij} = \rho$ dla $i \neq j$. Jeżeli sumy kwadratów $SS_i$ dla hipotez (3.3) są stochastycznie niezależne i suma ich jest równa sumie kwadratów dla hipotezy (3.2), to wówczas współczynniki korelacji (3.7) są równe zero dla $i \neq j$ (patrz Drwięga, 1976).

## 4. Zastosowanie procedury SANOVA w modelach regresji dla doświadczeń czynnikowych

Niech równanie (3.1) będzie równaniem regresji wielokrotnej. Wtedy macierz $\underline{A}$ jest macierzą pełnego rzędu kolumnowego i każda hipoteza postaci (3.2) jest testowalna. W praktyce często weryfikuje się hipotezę, że jakiś podwektor $\underline{\beta}_1$ wektora parametrów $\underline{\beta}$ jest wektorem zerowym. Hipoteza (3.2) przybiera wówczas postać

$$H : \underline{\beta}_1 = \underline{0} \tag{4.1}$$

Hipoteza (4.1) jest koniunkcją hipotez

$$H_i : \beta_{1i} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,t \tag{4.2}$$

gdzie $t$ jest liczbą składowych wektora $\underline{\beta}_1$. Hipotezy postaci (4.2) mówią o nieistotności poszczególnych składowych wektora $\underline{\beta}_1$.

Niech $\sigma^2\underline{D}$ oznacza macierz kowariancji estymatora najmniejszych kwadratów $\hat{\underline{\beta}}_1 = [\hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{12}, \ldots, \hat{\beta}_{1t}]'$ wektora $\underline{\beta}_1$. Jest ona oczywiście podmacierzą macierzy $\sigma^2(\underline{A}'\underline{A})^{-1}$. Suma kwadratów $SS_i$ dla hipotezy $H_i$ jest równa

$$SS_i = \hat{\beta}_{1i}\, d_{ii}^{-1}\, \hat{\beta}_{1i} = (d_{ii}^{-\frac{1}{2}}\, \hat{\beta}_{1i})^2 \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,t \tag{4.3}$$

(por.Oktaba, 1972), gdzie $d_{ii}$ jest odpowiednim elementem macierzy $\underline{D}$.

Macierz $\underline{X}$ t-wymiarowego "stowarzyszonego" rozkładu normalnego będzie zatem wektorem wierszowym postaci

$$\underline{X} = [d_{11}^{-\frac{1}{2}}\hat{\beta}_{11}, d_{22}^{-\frac{1}{2}}\hat{\beta}_{12}, \ldots, d_{tt}^{-\frac{1}{2}}\hat{\beta}_{1t}]$$

Współczynnik korelacji pomiędzy i-tą a j-tą składową wektora $\underline{X}$ jest równy

$$\rho_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sqrt{d_{ii}d_{jj}}} \tag{4.4}$$

Tablice wielowymiarowego rozkładu F skonstruowane są jedynie dla przypadku, gdy

$$\rho_{ij} = \rho \qquad \text{dla} \quad i \neq j \tag{4.5}$$

Warunek ten jest spełniony dla układu hipotez (4.2) np. wtedy, gdy macierz $\underline{D}$ ma jednakowe elementy na przekątnej i jednakowe elementy poza przekątną. W modelu regresji drugiego stopnia dla doświadczeń kompozycyjnych macierz $(\underline{A}'\underline{A})^{-1}$ ma na ogół postać

$$(\underline{A}'\underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{s} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{f} \\ \underline{0} & \underline{P} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{Q} & \underline{0} \\ \underline{f} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{R} \end{bmatrix}$$

gdzie $\underline{0}$ oznacza macierz zerową, s jest elementem odpowiadającym wyrazowi wolnemu wielomianu regresyjnego, $\underline{P}$ - macierzą odpowiadającą liniowym współczynnikom regresji, $\underline{Q}$ - macierzą odpo-

wiadającą mieszanym współczynnikom regresji, $\underline{R}$ - macierzą odpowiadającą kwadratowym współczynnikom regeresji, a $\sigma^2\underline{f}$ jest wektorem kowariancji między estymatorami współczynników kwadratowych, a estymatorem wyrazu wolnego. W wielu przypadkach macierze $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ są diagonalne, a macierz $\underline{R}$ ma jednakowe elementy przekątniowe i jednakowe elementy poza przekątną (por. np. Zieliński (1974), Mańczak (1976)). Wektor $\underline{\beta}_1$ w hipotezie (4.1) może zatem składać się z efektów liniowych i mieszanych lub efektów kwadratowych.

## 5. Przykład

Zastosowanie przedstawionej w poprzednich paragrafach metody zilustrujemy na przykładzie skonstruowanym w oparciu o pracę Michałowskiego (1973). Badano wpływ trzech składników nawożenia: azotu N, fosforu P, potasu K na plon żyta ozimego. Przypuszczano, że zależność plonu od badanych czynników można opisać wielomianem drugiego stopnia, tzn.

$$Ey = \beta_0 + \beta_1 N + \beta_2 P + \beta_3 K + \beta_{12} NP + \beta_{13} NK + \beta_{23} PK + \beta_{11} N^2 + \beta_{22} P^2 + \beta_{33} K^2$$

Plan doświadczenia oraz obserwacje przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

| N | P | K | $y_i$ |
|---|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 | 15.8 |
| -1 | -1 | 1 | 16.9 |
| -1 | 1 | -1 | 17.0 |
| -1 | 1 | 1 | 18.4 |
| 1 | -1 | -1 | 20.8 |
| 1 | -1 | 1 | 21.7 |
| 1 | 1 | -1 | 21.7 |
| 1 | 1 | 1 | 23.1 |
| 1 | 0 | 0 | 21.9 |
| -1 | 0 | 0 | 17.1 |
| 0 | 1 | 0 | 20.1 |
| 0 | -1 | 0 | 18.8 |
| 0 | 0 | 1 | 20.0 |
| 0 | 0 | -1 | 18.8 |
| 0 | 0 | 0 | 19.5 |

przy czym poziomy: -1, 0, 1 odpowiadają dawkom: dla azotu - 20,40 i 60 kg/ha, dla fosforu - 16,32 i 48 kg/ha oraz dla potasu - 24,48 i 72 kg/ha. Macierz planu $\underline{A}$ dla takiego doświadczenia ma postać:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Przypuśćmy, że interesuje nas hipoteza o nieistotności efektów kwadratowych, tzn. hipoteza

$$H : [\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}]' = \underline{0} \tag{5.1}$$

W przypadku odrzucenia tej hipotezy nasuwa się pytanie, czy każdy z efektów kwadratowych jest różny od zera, czy tylko niektóre. Odpowiedź na nie można uzyskać traktując hipotezę (5.1) jako koniunkcję hipotez

$$H_i : \beta_{ii} = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{5.2}$$

i stosując procedurę testów jednoczesnych SANOVA. W tym celu należy wyznaczyć metodą analizy wariancji sumy kwadratów (4.3) dla hipotez (5.2) oraz średni kwadrat dla błędu. Dla danych z tabeli 1

wielkości te są odpowiednio równe 0.00, 0.0030, 0.0120, 0.0014. Wartości statystyki F wynoszą zatem 0.00, 2.14, 8.57. Macierz $\underline{D}$, której elementy są potrzebne do wyznaczenia współczynników korelacji (4.3) i sprawdzenia warunku (4.4) jest podmacierzą macierzy

$$(\underline{A}'\underline{A})^{-1} = \left[\begin{array}{cccc:cccc:ccc}
\frac{13}{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\
\hdashline
0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & & & & & \underline{0} & \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & & & & & & \\
\hdashline
0 & & & & \frac{1}{8} & 0 & 0 & & & \\
0 & & \underline{0} & & 0 & \frac{1}{8} & 0 & & \underline{0} & \\
0 & & & & 0 & 0 & \frac{1}{8} & & & \\
\hdashline
-\frac{1}{9} & & & & & & & \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\
-\frac{1}{9} & & \underline{0} & & & \underline{0} & & -\frac{1}{9} & \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} \\
-\frac{1}{9} & & & & & & & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{7}{18}
\end{array}\right]$$

Zatem

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

Jak łatwo zauważyć $\rho_{ij} = -0.3$ $(i \neq j;\ i,j = 1,2,3)$. Wartość tablicowa trójwymiarowego rozkładu F z (1,5) stopniami swobody

dla $\rho = 0.3$ przy $\alpha = 0.05$ jest równa 11.3 (por.Krishnaiah i Armitage, 1970). Porównując wartości statystyk F z wartością tablicową otrzymujemy jako wniosek brak podstaw do odrzucenia którejkolwiek z hipotez (5.2) a w konsekwencji do odrzucenia hipotezy (5.1).

Ponieważ w naszym przykładzie macierz kowariancji wektora estymatorów efektów liniowych i mieszanych jest macierzą diagonalną

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & \vdots & & & \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & \vdots & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ & \underline{0} & & \vdots & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ & & & \vdots & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

więc procedurę SANOVA można stosować dla hipotezy o nieistotności dowolnego podwektora wektora efektów liniowych i mieszanych. Np. hipotezę

$$H : [\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23}]' = \underline{0} \tag{5.3}$$

o nieistotności wektora efektów mieszanych można przedstawić jako koniunkcję hipotez

$$H_{ij} : \beta_{ij} = 0 \qquad (i \neq j;\ i,j = 1,2,3) \tag{5.4}$$

o nieistotności poszczególnych efektów mieszanych. Ponieważ sumy kwadratów (4.3) dla hipotez (5.4) są dla danych z tabeli 1 odpowiednio równe 0.02, 0.005, 0.08 więc statystyka F przyjmie wartości 14.29, 3.57, 57.00. Wartość tablicowa trójwymiarowego rozkładu F z (1,5) stopniami swobody dla $\alpha = 0.05$ przy $\rho = 0$ jest równa 11.54. Porównując wartości statystyk F z wartością tablicową otrzymujemy jako wniosek, że istotne są współczynniki $\beta_{12}$ i $\beta_{23}$, a współczynnik $\beta_{13}$ można uznać jako nieistotny. Konsekwencją tych wniosków jest odrzucenie hipotezy (5.3).

## Literatura cytowana

Drwięga, T., 1976: Testowanie hipotez liniowo-estymowalnych, VI Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, PAN, Warszawa, 120-130.

Drwięga, T., Graboś, Z., 1978: Zastosowanie wielowymiarowego rozkładu F do jednoczesnego testowania hipotez, VIII Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, PAN, Warszawa.

Ghosh, M.N., 1955: Simultaneous tests of linear hypotheses, Biometrika 42, 441-449.

Krishnaiah, P.R., 1965: On the simultaneous ANOVA and MANOVA tests, The Annals of Mathematical Statistics, 17, 35-53.

Krishnaiah, P.R., Armitage, J.V., 1970: On a multivariate F distribution, Essays in Probability and Statistics, University of North Carolina Press, Chapel Hill, North Carolina.

Mańczak, K., 1976: Technika planowania eksperymentu, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Michałowski, K., 1973: Efektywność nawożenia mineralnego w świetle doświadczeń ekstremalnych, Państwowe Wydawnictwa Rolnicze i Leśne, Warszawa.

Oktaba, W., 1972: Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie; PWN, Warszawa.

Ramachandran, K.V., 1956: On the simultaneous analysis of variance tests. The Annals of Mathematical Statistics, 27, 521-528.

Schuurmann, R.J., Krishnaiah, P.R., Chattopadhyay, A.K., 1975: Tables for a multivariate F distribution, Sankhya, B 37, 308-331.

Zieliński, R., 1974: Wybrane zagadnienia optymalizacji statystycznej, PWN, Warszawa.